WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

Орнаменты: воображение, геометрия, компьютер

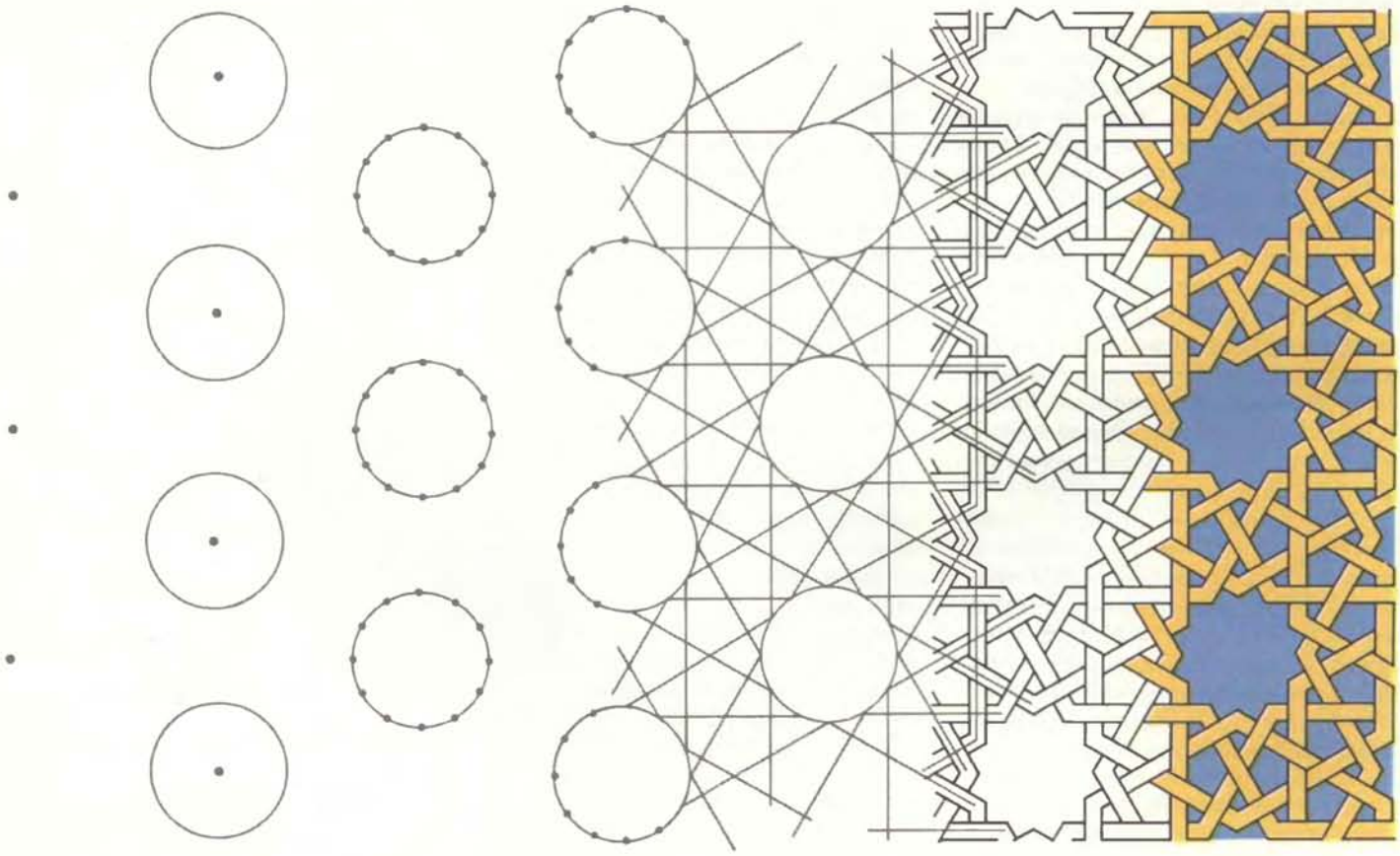
А. К. Дьюдни

Хотя компьютеры все глубже проникают в искусство, в этой области для человека остается еще достаточно широкое поле деятельности. Структуры, которые я называю решетчатым орнаментом, пока не демонстрируются на компьютерных экранах, их рисуют на обычных листах бумаги. Они создаются не за считанные секунды компьютерной программой, а медленно обретают форму под карандашом, линейкой и транспортиром, которыми манипулирует рука человека.

Сначала узоры рождаются в нашем воображении, когда мы мысленно представляем, например, решетку из переплетающихся окружностей. Каждый из нас способен ради забавы или всерьез построить на бумаге замысловатый узор из переплетающихся линий, глядя на который мы потом удивляемся и восхищаемся. Подобные узоры можно встретить на древних надгробиях и на стенах дворцов, которых немало повсюду, от Самарканда до Севильи. Строгие орнаменты арабского средневековья символически отражают бесконечность в конечном пространстве. Пользовались ли авторы этих орнаментов методами, которые я опишу ниже? Эксперты пока не пришли к определенному мнению относительно методов построения древних орнаментов, однако установлено, что с математической точки зрения эти узоры подчиняются законам геометрии и топологии.

Существует много подходов к анализу решетчатых орнаментов, но для начала, пожалуй, лучше всего рассмотреть их свойства симметрии. Например, образец, представленный на нижнем рисунке, обладает ярко выраженной симметрией: поворачивая его на 120° вокруг определенных точек, мы получим картину, подобную исходной. Зеркальное отражение по определенным линиям также дает почти идентичную картину. Наиболее заметные элементы узора — золотистые ленты, вьющиеся подобно шоссейным дорогам по кажущемуся бесконечным ландшафту. По всему орнаменту разбросаны окружности, в строгом соответствии со свойствами симметрии. Ленты тянутся от одной окружности к другой, сходясь вокруг них по 12, и резко изгибаясь, расходятся опять. Угол их отражения равен углу падения. Сами ленты также имеют форму, в данном случае либо шестиугольную, либо загзагообразную. Повсюду видны пересечения, в которых каждая лента поочередно проходит то над, то под пересекающими ее другими лентами. Каким образом был построен этот орнамент?

Решетчатые орнаменты принадлежат широкому классу бесконечных структур, имеющих по крайней мере две независимые симметрии переноса: если перемещать такую структуру вдоль другой идентичной ей структуры, то в конце концов они сольются, так что все линии будут совмещенными. Какими бы сложными ни были бесконечные решетки, если они обладают двумя независимыми симметриями переноса, они обязательно относятся к одной из 17 возможных кри-



Этапы построения решетчатого орнамента

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

сталлографических групп, впервые введенных русским ученым Евграфом Федоровым. В необычайном богатстве решетчатых орнаментов, дошедших до нас из прошлого, можно найти представителей всех 17 групп. Их можно увидеть например, на оконных решетках или в росписи внутренних стен резиденции какого-нибудь султана.

Переносы — это лишь одна из четырех возможных операций, устанавливающих симметрию в плоском орнаменте. Операция отражения «перекидывает» плоскость, как огромную крышку, на противоположную сторону от оси, которая сама принадлежит плоскости. По существу это зеркальное отражение, в котором буквы перевернуты, а лица выглядят несколько иначе. Третья операция, обеспечивающая симметрию — это вращение: плоскость поворачивается на определенный угол относительно одной точки. Наконец, четвертый вид симметрии достигается с помощью двух операций: переноса, за которым следует отражение относительно линии, параллельной направлению переноса.

Все эти операции можно комбинировать, выполняя их в той или иной последовательности. При использовании всех перечисленных операций возникает алгебраическая структура, называемая группой. В группе произведение любых двух операций также является операцией, и для каждой операции существует обратная ей операция, которая как-бы ликвидирует ее результат. Кроме того, группа содержит так называемый единичный элемент (операция, которая ничего не делает). Группа должна также удовлетворять ассоциативному закону: если выполняются подряд три операции, то результат не должен зависеть от того, следует ли третья операция за первыми двумя или последние две следуют за первой. Признаемся, что в такой формулировке закон звучит, мягко говоря, глуповато, но это только потому, что справедливость ассоциативного закона по отношению к операциям симметрии на плоскости, как говорится, вполне очевидна. В приведенном примере группа операций симметрии для решеток на международном языке кристаллографии называется $p6$. Она характеризуется поворотом на 60° вокруг точек одного множества и на 120° вокруг точек другого множества. Центры этих вращений читатели легко найдут на рисунке.

Представленный здесь орнамент я построил несколько лет назад, пользуясь методом, который опишу ниже. Позже такую же решетку я обнаружил в книге, посвященной мусульманскому средневековому искусству.

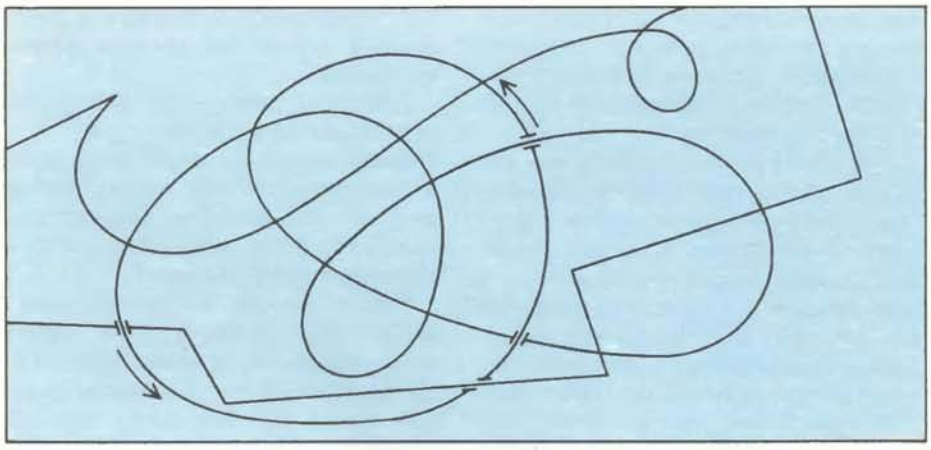


Иллюстрация правила «над-под»

Чувство разочарования от того, что кто-то меня опередил, с лихвой компенсировалось совершенным открытием —метод построения был тот же. С тех пор мне удалось заново «открыть» еще несколько орнаментов.

Следуя этому методу, автор будущего орнамента сначала должен построить решетку из точек. Решетки могут быть четырех типов: треугольные, квадратные, прямоугольные или шестиугольные. Такие решетки легко строятся при помощи линейки и транспортира. Сначала проводим по линейке линию основания, затем с помощью транспортира отметим точки решетки, отстоящие на равном расстоянии друг от друга. При построении квадратных и прямоугольных решеток новые точки добавляются сверху и снизу от линии основания на концах перпендикулярных к ней отрезков. При построении треугольных и шестиугольных решеток используются равносторонние треугольники.

Рассматриваемый орнамент начинается с построения треугольной решетки. Затем около каждой точки решетки описывается окружность. Здесь уже впервые проявляется интуиция, потому что размер окружностей имеет очень важное значение. Немного позже я объясню, какую роль может играть интуиция при выборе размеров.

После того как окружности нарисованы, нужно выбрать и отметить несколько точек, равномерно разбросанных по окружности. Этими точками мы фиксируем линейные элементы орнамента. Положение и количество точек должны отражать свойства симметрии самой решетки. Другими словами, точки должны быть расставлены с соблюдением симметрии, соответствующей операциям отражения и вращения. При выполнении любой операции симметрии эти точки должны будут наложиться на точки либо другой, окружности, либо той же самой . В рассматриваемом случае количество точек на каждой окружности должно быть кратным 3. Я выбрал число 12, чтобы узор был более насыщенным. Поскольку необходимо, чтобы орнамент удовлетворял свойству симметрии отражения, возможны лишь два расположения точек на окружности. Я выбрал такое расположение, при котором 6 точек находились на кратчайшем расстоянии от соседних окружностей. А вообще, при любом выборе надо следовать правилу, согласно которому наилучшим является решение, гармонирующее с уже существующей симметрией.

На следующем этапе построения соединим точки, отмеченные на каждой окружности, с точками других окружностей. Здесь опять на помощь приходит интуиция. Возникает такое множество вариантов, что кажется, будто правильный выбор можно сделать только интуитивно. На самом деле количество возможных вариантов опять существенно ограничивается условиями симметрии: если соединить какую-нибудь точку на окружности A с точкой на окружности B, то благодаря свойствам симметрии такое же соединение должно распространиться и на другие точки окружности A. Таким образом, не успеем мы провести и пару линий, как станет ясно, что мы нарушили симметрию; линии придется стереть и пробовать уже другой тип соединения.

На этой стадии возникает своеобразная обратная связь с совершенным ранее выбором размера окружностей. Когда на первый взгляд удовлетворительная и согласованная схема соединений завершена, результаты могут оказаться неудачными как в математическом, так и в эстетическом смысле. Линии могут не гармонировать с симметрией узора. В таких случаях обычно становится ясно, следует ли уменьшить или увеличить окружности, чтобы соединение их линиями отвечало основным свойствам симметрии орнамента. Здесь интуиция мо-

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

жет неожиданно дать верное решение, вы как будто прозреете и, увидев внутренним зрением расположение линий с новыми окружностями, воскликните «эврика!».

Достигнув первых успехов, вы, наверное, почувствуете некоторое волнение, линейка и транспортир начнут слегка подрагивать в ваших руках. Вас охватит чувство, которое часто испытывают художники и математики. Но стоит ли восхищаться интуицией, подсказавшей вам решение, просто игнорируя законы геометрии?

Так или иначе, настало время проложить по нашему ландшафту систему шоссейных дорог и придать ей достаточный размах. Ни одна система скоростных трасс не должна страдать от избытка светофоров, но как тогда обеспечить движение на пересечениях дорог? Вспомним, что ткань плетется из нитей путем поочередного пропускания одной нити над и под другими нитями. Однако не получится ли так, что при построении системы дорог мы в конце концов окажемся в тупике и нам придется сделать подряд два прохода снизу? Топология гарантирует, что этого не произойдет.

В самом деле, давайте поэкспериментируем. Нарисуем на листе бумаги большой прямоугольник. Затем будем проводить в нем линии, соблюдая лишь два правила:

1. Начинаться и кончаться линия должна только на границе прямоугольника.

2. В одной точке может пересекаться не более двух линий.

Можно, например, нарисовать нечто в абстрактном стиле, как на рисунке на с. 81. Линии могут быть плавно изогнутыми или ломаными, с многократными пересечениями.

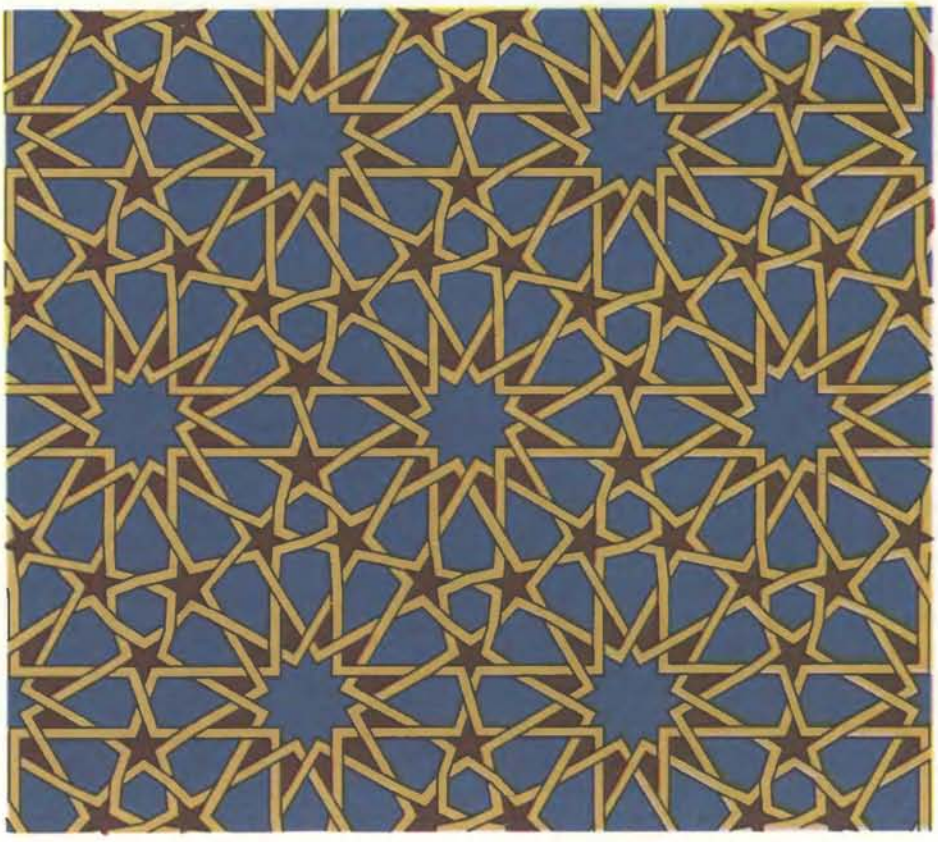
Чтобы превратить этот рисунок в невероятно сложный узел, нужно лишь следовать правилу «над-под». Начав с любой точки и следуя по одной линии, мы повторяем про себя при каждом пересечении: «над, под, над...». Это, конечно, означает, что, следуя вдоль какой-то линии, мы говорим «над», проходя поверх пересечения, и соответственно «под», если проходим под ним. В конце концов мы либо придем к исходной точке, либо достигнем границы прямоугольника. По пути наша линия может пересечь и саму себя. Удивительно, но всякий раз, когда мы повторно приходим к какому-нибудь пересечению, оказывается, что оно как раз такое, каким его следовало бы сделать, следуя нашему правилу. Другими словами, мы никогда не скажем «над», если это пересечение на предыдущем проходе было помечено как «под». В конце концов мы построим все мосты и туннели, и то, что раньше казалось бессмысленными каракулями, примет вид современной системы дорог.

Правило «над-под» работает потому, что в некотором смысле оно не может не работать. Простая демонстрация этого факта наводит на интересные размышления. Наши каракули поделили прямоугольник на множество небольших областей. Оказывается, можно раскрасить все области прямоугольника двумя цветами, так что никакие две граничащие области не будут окрашены в один и тот же цвет. (Убедительное и в то же время элементарное доказательство этого факта заняло бы не более нескольких абзацев, но мне не терпится сказать самое главное.) Предположим, что области прямоугольника окрашены в красный и синий цвета. Двигаясь по одной из дорог к пересечению, мы заметим, что либо область справа от нас будет красной, а слева — синей, либо наоборот.

В этом простом наблюдении и заключается рецепт разведения дорог на их пересечениях. Передвигаясь по дороге от перекрестка к перекрестку, бригада строителей каждый раз будет знать, нужно ли им строить мост или туннель. Если область справа по пути к перекрестку красная, нужно строить мост, а если синяя — туннель. Результат будет в точности таким же (или его «негативным изображением»), как если бы строители следовали описанному выше правилу «над-под».

Теперь при помощи карандаша и линейки читатель сможет превратить каждую линию орнамента в полосу, проведя с обеих сторон по параллельной линии. Эта работа выполняется чисто механически и не представляет особой сложности, за исключением небольших участков на изгибах линий. В ходе процедуры утолщения линий пересечения пока можно игнорировать. Затем вооружившись ластиком, примемся за пересечения и, руководствуясь правилом «над-под», придадим им соответствующий вид. Чтобы соорудить «мост», нужно стереть прилегающие к нему краешки проходящей под ним дороги. После этого пересечение действительно становится похожим на мост, под которым пролегает пересекаемая дорога. «Туннели» создаются при помощи противоположной процедуры. Интересно отметить, что в ходе такого переплетения уничтожаются все отражательные симметрии орнамента — хотя новая структура выглядит такой же, но, приглядевшись, можно заметить, что на месте мостов находятся туннели, и наоборот.

Две последние фазы создания орнамента — обведение контуров



Мусульманский решетчатый орнамент

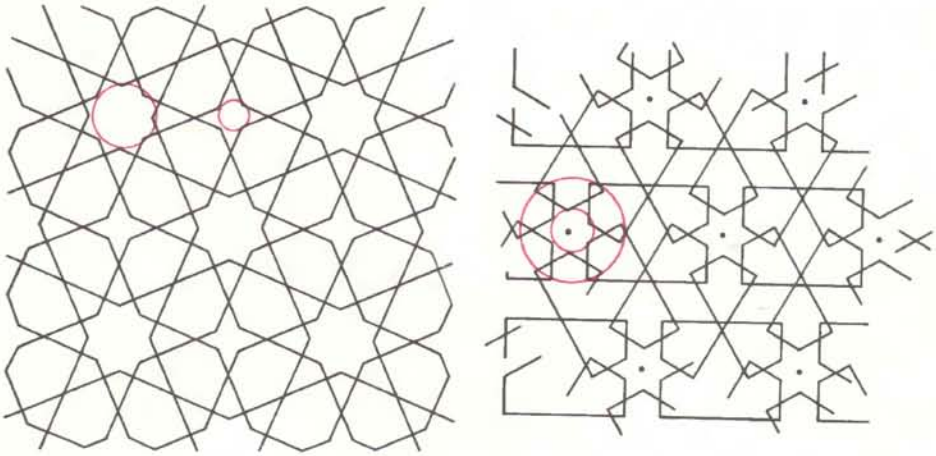
WWW.SCIAM-MAGAZINE.NARODRU

тушью и раскрашивание. Пользуясь хорошей ручкой, можно провести по линейке четкие контуры, прерывая их иногда на поворотах и пересечениях. Чтобы обвести орнамент средней сложности, потребуется около часа, но что такое час для художника, поглощенного творчеством? Во время работы можно подумать и о других вещах. Это спокойное занятие может стать своеобразной формой медитации.

После того как вы обвели контуры всего узора и стерли карандашные пометки, можно приступить к раскрашиванию. Поскольку раскрашивание не всегда удается с первого раза, имеет смысл сначала скопировать обведенный узор и раскрашивать уже копию. Таким образом, из исходных контуров можно сделать несколько цветных орнаментов, один красивее другого. Для раскраски советую воспользоваться темперой. Эта краска ложится ровно, почти не морщит бумагу и продается в наборах, где есть практически все цвета, в том числе золотой и серебряный. Более того, растворимые водой краски, или краски на водной основе, такие как темпера, не смачиваются тушью. Это очень важное обстоятельство, поскольку у не очень тренированного художника темпера почти неизбежно будет местами наезжать на тушь. Орнамент, конечно, будет намного красивее, если все раскрашенные области будут четко окантованы черной тушью, придающей дополнительный контраст.

Какого цвета краски выберет читатель — это, конечно, дело его личного вкуса. Художники, создававшие подобные росписи для областей, заключенных между линиями, чаще всего выбирали темные, приглушенные тона. Благодаря этому приему создается двойной план и сам узор ярче выступает на темном фоне. Я привожу здесь еще один орнамент, раскрашенный по этому принципу (см. рисунок на с. 82).

Этот второй орнамент был получен аналогично первому. Сложные решетчатые орнаменты могут иметь не только то, что можно назвать первичной системой окружностей, но и вторичные окружности. Каждая пятиконечная звезда этого орнамента порождается такой вторичной окружностью. Приведу еще два примера решетчатых орнаментов, изобразив лишь их контуры. На одном из них первичные и вторичные окружности расположены так, что их центры совпадают с центрами различных симметрий вращения, на другом эти окружности концентрические (см. рисунок вверху). Обе эти структуры



Контуры двух орнаментов

часто встречаются в классических орнаментах.

Решетчатые орнаменты близки по своим свойствам к структурам, называемым двумерными сотами и состоящим из множества копий одного и того же узора, точно пригнанных краями друг к другу, без наложения. В основе такого орнамента может лежать один и тот же элемент узора, нанесенный, например, на кафельную плитку, или на изразец. Имея множество идентичных изразцов, можно сложить сколь угодно большой орнамент, располагая плитки в определенном порядке. Если проанализировать любой из представленных здесь орнаментов, то в каждом из них найдется небольшая область, которую можно перенести на одну плитку. Во всяком случае, в этом заключается принципиальная основа любого орнамента подобного рода. Нарежьте из бумаги квадраты по размеру изразца и раскрасьте их. Из множества таких копий можно построить разнообразные орнаменты.

Вернемся к решетчатым орнаментам прошлого. Какими методами они были построены и каково их смысловое значение? Лайза Голомбек в течение многих лет изучала подобные узоры как на местах, так и у себя на факультете культуры Ближнего Востока и ислама в Университете Торонто. Она считает, что орнаменты, вероятно, строились на основе определенных геометрических форм, прямоугольных решеток и окружностей. Несомненно, каждый мастер пользовался теми или иными вариациями основного метода. Что же касается смыслового значения, Голомбек оспаривает традиционное объяснение, согласно которому геометрические формы использовались только потому, что мусульманская религия запрещала изображать людей и животных. По ее мнению, решетчатые орнаменты символизируют космический порядок, являющийся идейной основой ислама. В пользу ее версии свидетельствует соседство геометрических орнаментов с изображениями людей и животных, обнаруженных на остатках жилых зданий. Поскольку запреты, игнорировались, то, очевидно, обитателям этих домов нравился космический порядок.

Я был не совсем прав, сказав, что компьютеры не играют никакой роли в создании решетчатых орнаментов. Запрограммировать компьютер так, чтобы он принимал интуитивные решения, ведущие к очень красивым узорам, — задача, по-видимому, трудная. Гораздо легче составить программу, которая помогала бы конструировать орнаменты. Такая программа могла бы по выбору пользователя построить ту или иную основную решетку точек и предоставлять ему возможность выбирать размеры окружностей, число точек на окружности и т. п. Если при наличии такой программы указать тип соединений, на экране мгновенно появится сложный рисунок. Короче говоря, программа позволила бы избежать выполнения утомительных механических операций при создании орнамента. Ну а сам готовый «продукт» можно получить отпечатанным на принтере.

В АПРЕЛЬСКОМ номере журнала мы познакомились со слепым часовым мастером и биоморфами — творением Ричарда Доукинса. Точнее говоря, биоморфы были творением не Доукинса, а программы, которую он написал. Экран персонального компьютера типа «Макинтош» делится на 9 квадратов. В центральном квадрате находится древовидная структура, а в восьми соседних квадратах — вариации на тему центральной структуры. Человек, руково-

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

дящий процессом, выбирает одну из восьми вариаций, она переносится в центр и порождает свое потомство.

Направляемый человеком эволюционный процесс зачастую приводит к появлению удивительных форм, в которых можно увидеть все что угодно, от насекомого до аэроплана. В своей книге «Слепой часовой мастер» Доукинс приводит изображения, полученные с помощью его программы, и использует их в качестве одного из доказательств своего основного тезиса о том, что эволюция, даже очень медленная, может породить самые удивительные формы. Однако его все же беспокоит то обстоятельство, что разработанная им программа не совсем слепа. Каким образом, спрашивает он в своей книге, новые формы возникают в результате взаимодействия вида со средой обитания?

На конференции, посвященной вопросам искусственной жизни и проведенной в Лос-Аламосской национальной лаборатории в сентябре прошлого года, несколько ученых и любителей сообщили о том, что при моделировании эволюционного процесса им удалось получить организмы с новыми свойствами. Ни одно из этих сообщений не удовлетворило Доукинса. Об одной из последних работ в этой области мне рассказал Дж. Миттерер из Брокского университета в Онтарио. Она была выполнена Д. Плотом с факультета психологии Рочестерского университета и Д. Тэйлором из Сан-Матео (шт. Калифорния). Внимательный анализ работы Плота — Тэйлора показывает, что она не отличается принципиально от многих работ, представленных в Лос-Аламосе. Простые организмы, наделенные способностью находить себе пропитание и спасаться от врагов, демонстрируют определенное поведение, управляемое нервной системой. Организмы, не сумевшие выжить, не могут передать своего плохо приспособленного мозга потомству. Однако по условию этого эксперимента исходные существа уже обладают нервной системой. Доукинс же хотел бы увидеть, как сравнительно сложная нервная система появляется под влиянием естественного отбора, в ходе эволюции, начинающейся с примитивных организмов.

Д. Чесс, ученый из Исследовательского центра Томаса Уотсона фирмы IBM, тем не менее считает, что моделирование эволюции поведения может оказаться наиболее плодотворным. Например, описанный мной гнутозавр способен питаться сочными листьями шипофита только при условии, что горизонтальная часть его шеи имеет достаточную длину, чтобы достать листья. Однако сможет ли гнутозавр с такой шеей спасаться от хищников, спрашивает Чесс. Не разовьется ли у этого животного гипертония, не будет ли оно часто травмировать свою шею и т. п.?

Другой сотрудник фирмы IBM Д. Куртис из Кеннесо (шт. Джорджия) считает, что к научному креационизму следует отнестись более серьезно. Сторонники этого учения признают существование микроэволюции — постепенных изменений у того или иного вида. Однако, пишет Кертис, пока «нет никаких экспериментальных или ископаемых доказательств существования макроэволюции — фундаментальных изменений, в результате которых из старых видов возникают новые».

Наука и общество

Мушиные серенады

ЛЯГУШКИ, сверчки, цикады известны своими песнями. Оказывается, музыкальное оформление любви свойственно и дрозофилам (плодовым мушкам). Когда самец дрозофилы встречает самку, он реагирует на это призывной песней, являющейся частью ритуала ухаживания. Само по себе такое поведение не редкость. Но плодовых мушек отличает удивительное разнообразие «репертуара».

Об этом открытии сообщают в журнале «Science» Р. Хой из Корнеллского университета, А. Хойккала из Университета в Оулу (Финляндия) и К. Канесиро из Гавайского университета. Эти исследователи записали песни трех видов *Drosophila* и проанализировали их с помощью осциллоскопа. В песнях плодовых мушек можно выделить 4 типа, различных по акустическим характеристикам: серии щелчков наподобие звуков, издаваемых цикадами, сложные серии пульсов звука, похожие на стрекотание сверчков, простые серии пульсов и простые асиллабические (т. е. сплошные, не дискретные) звуки. Более того, способы генерации звуков очень разнообразны. Серии щелчков, издаваемые самцами *D. fasciculisetae*, состоят из повторяющихся коротких залпов высокочастотных (в среднем 6 кГц) звуковых посылок, возникающих вследствие вибрации оснований крыльев. Сходные высокочастотные звуки известны у цикад и кузнечиков, но у мух они не наблюдались. Сложные серии пульсов, зарегистрированные у *D. cyrtoloma*, состоят из 2—7 периодических пульсов, за которым следует длинная трель. Эти звуки сложны ритмически: самец производит их биением крыльев в двухчастном ритме. Самцы *D. silvestris* издают простые серии пульсов и простые сплошные звуки. Первые напоминают мурлыканье; эти периодические посылки звука производятся путем вибрации брюшка. Простая асиллабическая «песня» — результат быстрой вибрации крыльев, когда самец стоит, держа свою голову под крыльями самки.

Хой и его группа выявили эти 4 типа песен, изучив 20 видов мушек. Все они принадлежат к одной группе «пестрокрылых» дрозофилид, которые представлены на Гавайях 106-ю видами. Тот факт, что эти мушки на Гавайском архипелаге так обильны и разнообразны, немаловажен. Более нигде в мире нет такого богатства плодовых мушек. Общее число видов дрозофил на Гавайских островах достигает 500, при том что во всем мире их 1—2 тысячи. Как объяснить чрезвычайное разнообразие? Гавайский архипелаг возник в результате вулканических процессов 5—6 млн. лет назад. С тех пор немногие виды успешно преодолели две с лишним тысячи километров открытого океана, отделяющие острова от ближайшего массива суши — Северной Америки. Те животные, которым это удалось (большинство их — летающие формы), нашли на островах множество незанятых экологических ниш, вследствие чего началась дивергенция и возникли новые самостоятельные виды. Считается, что все 500 видов дрозофил, существующих ныне на Гавайском архипелаге, произошли от одной-двух самок.

Первые американцы

КОГДА люди впервые появились в Америке? Обычно считается, что они пришли туда сухопутным путем, по перешейку из Сибири немногим более 10 тыс. лет назад. Находки на многих древних стоянках как в Северной, так и Южной Америке позволяют предположить, что первые поселенцы могли появиться задолго до указанного времени. Так, на стоянке Монте-Верде в Чили получены радиоуглеродные датировки, относящиеся к периоду 13 тыс. лет назад. Но теперь археологи обнаружили в более глубоких слоях Монте-Верде предметы, которые имеют датировку более 30 тыс. лет назад.